Tässä on esitelty joitakin mahdollisuuksia hyödyntää Casion graafisen laskimen malleja 9750, 9850 ja 9950 tämän tuhatluvun ylioppilaskoetehtäviä ratkottaessa. YTL (ylioppilastutkintolautakunta) ei hyväksy pelkästään laskimella suoritettuja ratkaisuja. Kuitenkin, laskimella voidaan saada tuntumaa tehtävään ja ratkaista se. Tällöin oikea vastaus on selvillä ja sitten on vain löydettävä tapa suorittaa tehtävä käsin.

Kaikissa mahdollisissa yhtälöissä kannattaa ratkaisu tarkistaa sijoittamalla tulos **alkuperäiseen** yhtälöön. Tähän riittää funktiolaskinkin, ja tähän kokoelmaan ei olekaan näitä tarkistuksia otettu mukaan. Valikoima sisältää tehtäviä, joissa
- graafisen laskimen erikoisominaisuuksia voidaan käyttää
- graafisen laskimen käyttö ei vie kovin pitkää aikaa. Kokeessa ei kannata tuntitolkulla tuhrata aikaa laskimeen.

Laskimissa toimintoja voi valita hiukan eri tavoin, joten seuraavista saattaa paikoitellen tuntua puuttuvan joitakin EXE, EXIT tai F6-näppäilyjä.
Huomaa kuvaajien kohdalla, että laskin piirtää kaikki kuvaajat, joissa yhtäsuuruusmerkin ympärillä on neliö. Jos on vain yhtäsuuruusmerkki, niin ei piirretä. Tämä valinta tehdään näppäimellä SEL (F1, tarvittaessa ensin F6).
Tässä kokoelmassa kaikki funktiot ovat tavallista tyyppiä (ei parametrimuotoa, napakoordinaatteja eikä epäyhtälöitä). Kuvaajatyypin valinta on kohdassa TYPE (F3, tarvittaessa ensin F6.)
Funktion lausekkeen saa pois toiminnalla DEL (F2, tarvittaessa siis ensin F6) tai kirjoittamalla uusi lauseke edellisen sijaan.

KEVÄT 2000

2 Lukion jazzyhtyeen konsertin tuotto 192 € on jaettava tasan yhtyeen jäsenille. Jos jäseniä olisi 2 enemmän, jokainen saisi 8 € vähemmän. Montako jäsentä yhtyeessä on?

Jos x on jäsenten lukumäärä, niin saadaan yhtälö $\frac{192}{x+2}=\frac{192}{x}-8$. Tutkitaan yhtälön kummankin puolen kuvaajia.

MENU
GRAPH
Kirjoita 192/(x+2) ja paina EXE. Kirjoita 192/x – 8 ja paina EXE.
V-Window (SHIFT ja F3)
Valitse esim: Xmin : 0 Xmax : 15 Ymin : 0 Ymax : 30.
Huomaa, että Ymax kannattaa valita aika suureksi, jotta kuvaaja mahtuu näyttöön.
EXIT
DRAW (F6)
Etsitään leikkauspiste.
G-Solv (SHIFT ja F4)
ISCT (F5) (engl. intersection)
Tulos: X = 6 (ja Y = 24).

3 a) Sievennä lauseke a) $\dfrac{\dfrac{1}{x}-x}{\dfrac{1}{x}+1}$. b) Sievennä lauseke $\dfrac{x-1}{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$

c) Ratkaise tämän jälkeen yhtälö $\dfrac{\dfrac{1}{x}-x}{\dfrac{1}{x}+1}=\dfrac{x-1}{\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$.

Sieventämällä kohtaa a) saadaan 1 – x. Tämän tuloksen voi tarkistaa laskemalla tehtävän lausekkeen ja saadun vastauksen arvot muutamilla lukuarvoilla. Listan käyttö toimii aika nopeasti:

MENU
LIST
Kirjoita Listaan 1 muutama luku, vaikkapa 1, 2, 3, 4 ja 5. Siirry sanan List 2 päälle ja kirjoita siihen tehtävän lauseke (sana List saadaan näppäilemällä OPTN ja LIST ja F1):
(1 / List 1 – List 1) / (1 / List 1 + 1).
Siirry sanan List 3 päälle ja kirjoita
1 – List 1.
Vertaile tuloksia!
Tämä ei toki anna sataprosenttista varmuutta sille, että lausekkeet ovat samat kaikilla *x*:n arvoilla, mutta kohtalaisen varmuuden kuitenkin.

8 Puhelinkeskukseen tulevien puhelujen lukumäärä noudattaa ns. *Poissonin jakaumaa*: todennäköisyys, että minuutissa tulee *n* (≥0) puhelua, on $p_n = \dfrac{a^n}{n!}e^{-a}$, jossa vakio *a* kuvaa keskuksen ruuhkaisuutta. Laske todennäköisyys, että keskukseen tulee minuutissa ainakin 5 puhelua, kun *a* = 3.

Tehtävä ratkeaa komplementin kautta:
P(ainakin 5 puhelua) = 1 – P(korkeintaan 4 puhelua) = $1-\sum_{n=0}^{4}\dfrac{3^n}{n!}e^{-3}$. Tässä voi käyttää lukujonotoimintoja.

MENU
RUN
OPTN tänne on sijoitettu paljon erilaisia toimintoja
LIST (F1) lukujonot (eli listat)
Sum (F6 ja F6 ja F1) sana summa
Seq (F6 ja F3) engl. sequence, jono.
Näytössä olevan Sum Seq(perään tulee lauseke, muuttuja, alku, loppu ja askelen pituus:
Sum Seq((3^x / x!) e –3 , x, 0, 4, 1).
Huom! Kirjoitettaessa e^x EI PIDÄ painaa potenssimerkkiä ^ . Kertoma saadaan paikasta OPTN ja PROB.
Tehtävän vastaus: **1 – Ans** ja **EXE**. (Ans = answer, edellisen laskun tulos)

11 Astia on kärjellään seisova avonainen ympyräkartio. Kartion pohjan säde on 6,6 cm ja sivujana 11,0 cm. Astia on täynnä vettä. Astiaan asetetaan pallo, joka sivuaa kartion vaippaa. Määritä pallon säde siten, että astiasta valuva vesimäärä on mahdollisimman suuri.

Pallo ei ole kokonaan kartion sisällä (mikä on toki tarkistettava). Jos *r* on pallon säde, niin ”pienen” pyörittelyn jälkeen saadaan pallon kartion sisällä olevan osan tilavuudeksi

$V = \frac{4p}{81}(27r^3 - 16(r - 3{,}3)^2(r + 26.4))$.

Tutkitaan tätä funktiota. Piirretään ensin kuvaaja:
MENU
GRAPH
Kirjoita funktion lauseke käyttäen kuitenkin muuttujana x:ää eikä r:ää.
Valitaan vielä näyttöalue:
V-Window (SHIFT ja F3)
Anna esimerkiksi arvot
Xmin: 0 Xmax: 15 Ymin: 0 Ymax: 500
EXIT
DRAW (F6) piirrä!

Etsitään maksimikohta:
G-Solv (SHIFT ja F5) ”grafiikkasoveri”
MAX (F2).
Tulos: x = 6 (ainakin likimain) y = 318,48… .

SYKSY 2000

2 Ratkaise yhtälö $\sqrt{x-2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x-2}}$.

Tutkitaan kuvaajia:
MENU
GRAPH
Kirjoita vasemman ja oikean puolen lausekkeet eri funktioiksi. Muista EXE loppuun.
V-Window (SHIFT ja F3)
Anna esimerkiksi arvot
Xmin: 0 Xmax: 15 Ymin: 0 Ymax: 10.
EXIT
DRAW (F6)

Leikkauspisteen määritys:
G-Solv (SHIFT ja F5)
ISCT (F5) (engl. intersection).
Jos näytössä on enemmän kuin kaksi kuvaajaa, täytyy halutut kuvaajat ensin valita EXE:llä.
Leikkauspiste on (6, 2) eli x = 6.

7 Todennäköisyys, että erään tulppaanilajikkeen sipuli itää, on 0,7. Kuinka monta sipulia on vähintään istutettava, jotta niistä ainakin kaksi itäisi yli 99 % todennäköisyydellä?

Jos n = tulppaanien lukumäärä, niin

P(ainakin kaksi itää) = 1 – (P(0 itää) + P(1 itää)) = $1-\left(0{,}3^n+\binom{n}{1}\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3^{n-1}\right)$

$=1-0{,}3^n-0{,}7n\cdot 0{,}3^{n-1}$.

Tämän tulisi ylittää 0,99. Epäyhtälöä ei pysty ratkaisemaan suoraan, vaan täytyy kokeilla arvoja. Laskimen taulukkotoiminnalla vastaus löytyy nopeasti:

MENU
TABLE
Kirjoita lauseke käyttäen kuitenkin n:n sijasta x:ää.
RANG (F5) (tarvittaessa ensin F6)
Start : 2 (vähempi ei ainakaan riitä!)
End : 20 (esimerkiksi; jos ei riitä, niin suurennetaan)
pitch : 1 (askelväli, siis 2, 2+1, …)
EXIT
TABL (F6).
Selattaessa taulukkoa havaitaan, että 6 ei aivan riitä (ellei hyväksytä prosenttiarvoksi pyöristettyä arvoa eli yli 98,5 %), mutta 7 riittää hyvin.

<u>KEVÄT 2001</u>

1 Ratkaise yhtälö $\frac{1}{x}-\frac{x}{x+3}=0$.

Yhtälö on sama kuin $\frac{1}{x}=\frac{x}{x+3}$. Piirretään yhtälön kummankin puolen lausekkeiden kuvaajat:
MENU
GRAPH
Kirjoita 1/x ja paina EXE. Kirjoita x/(x+3) ja paina EXE.
V-Window (SHIFT ja F3)
INIT (F1) (engl. initial, ”tehdasasetukset”)
EXIT
DRAW (F6)

Leikkauspisteitä näyttää olevan kaksi.
G-Solv (SHIFT ja F5)
ISCT (F5) (engl. intersection)
Vasemmanpuolisessa leikkauspisteessä x = -1,30277… . Toisen leikkauspisteen saat näppäilemällä nuolta oikealle.
Laskin ei kuitenkaan anna tarkkoja arvoja (joita YTL edellyttää).

2 Määritä käyrän $y = x^3$ pisteeseen (2, 8) piirretyn tangentin yhtälö. Missä pisteessä tangentti leikkaa *y*-akselin? Määritä tangentin, *y*-akselin ja suoran *y* = 8 rajoittaman kolmion ala.

MENU
GRAPH
Kirjoita x^3. Kirjoita myös funktion lauseke 8 (eli suora y = 8).
V-Window (SHIFT ja F3)
Valitse esim. Xmin : -1 Xmax: 5
Pystyakselille tarvitaan paljon tilaa: esim. Ymin : -30 ja Ymax : 30.
EXIT
DRAW (F6)

Sitten tangentti:
Sketch (SHIFT ja F4)
Tang (F2).
Siirry nuolinäppäimillä kohtaan, jossa x = 2 (ja y = 8) ja paina EXE. Laskin piirtää tangentin ja kertoo jopa tangentin kulmakertoimen, mikäli SET UPissa on valittu Derivative : On..
Kuvassa näkyy myös kyseinen kolmio.

6 Määritä funktion $f(x) = \dfrac{5}{4 + 3\cos 2x}$ suurin ja pienin arvo reaalilukujen joukossa. Millä argumentin arvoilla nämä saadaan?

Tehtävä ratkeaa toki nopeimmin, jos huomaa, että suurin arvo tulee, kun cos 2*x* = -1 ja pienin, kun cos 2*x* = 1.
Laskimella voidaan piirtää kuvaaja ja katsoa siitä suurin ja pienin arvo.

MENU
GRAPH
Kirjoita 5/(4+3cos(2x)). Varmista SET UPista, että Angle : Rad.
V-Window
Funktio on jaksollinen, perusjaksona π. Valitaan x-akselille kaksi jakson mittaa:
Xmin : 0 Xmax : 2π Xscale : $\pi/2$ (jolloin x-akselille saadaan tällaisin välein merkit). Valitse vielä: Ymin : -6 Ymax : 6 Yscale : 1.
EXIT
DRAW (F6)
G-Solv (SHIFT ja F5)
MAX (F2).
Tulos: x = 1,570… (siis $\pi/2$) ja y = 5. Paina nuolta oikealle ja saat toisen huipun.
Minimikohdan saat samaan tapaan:
G-Solv (SHIFT ja F5)
MIN (F3).

7 Tutkimuksessa todettiin, että 200 gramman keksipakkausten massan keskiarvo oli 204 g ja keskihajonta 6 g. Oletetaan, että massa on normaalisti jakautunut. Kuinka monella prosentilla pakkauksista massa oli alle 200 g? Kuinka monella prosentilla massa oli välillä 200 g – 210 g?

Arvon 200 g normitettu arvo on $\frac{200-204}{6}=-\frac{2}{3}$. Kyseinen todennäköisyys saadaan näin:
MENU
RUN
OPTN
PROB (F6 ja F3)
P((F6 ja F1) (todennäköisyys, että arvo pienempi kuin ….)
Kirjoita –2/3 ja paina EXE. Tulos: 0,25249.

Arvon 210 g normitettu arvo on 1. Toinen todennäköisyys saadaan nyt näppäilemällä:
PROB
P(
1) – Ans (Ans, answer, SHIFT ja (-)).

13 Lukujonon termit ovat $x_1=1$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=\sqrt{2\sqrt{2}}$, $x_4=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ jne. Muodosta termeille rekursiokaava. Laske $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Rekursiokaava on $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$, $x_1=1$. Raja-arvon saa selville laskimella varsin nopeasti:

MENU
RUN
1 alkuarvo
EXE
$\sqrt{\ }$(2Ans) (Ans = answer, näppäilemällä SHIFT ja (-))
Painele EXEä niin kauan kunnes arvo ei enää muutu.

SYKSY 2001

1 Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä $\begin{cases}3x-2y=1,\\4x+5y=2.\end{cases}$

Yhtälöryhmiä laskimella ratkottaessa yhtälöiden täytyy olla juuri tässä muodossa: muuttujat vasemmalla samassa järjestyksessä ja vakiot oikealla puolella.

MENU
EQUA
SIML (F1) (simultaneous equations = yhtälöryhmä)
2 (F1) yhtälöiden lukumäärä
Syötä kertoimet yksitellen, EXE jokaisen perään.
SOLV (F1)
Ratkaisut näkyvät päällekkäin desimaalilukumuodossa. Murtolukuarvo *x*:lle näkyy oikeassa alakulmassa. Siirry nuolella alaspäin, niin saat myös *y*:n tarkan arvon.

4 Osoita, että käyrillä $x^2 - 6x - 3 + 4y = 0$ ja $2x^2 + 1 - y = 0$ on yksi yhteinen piste, jossa ne sivuavat toisiaan, so. niillä on yhteinen tangentti.

Kuvaajia varten ratkaistaan kummastakin yhtälöstä y :

$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ ja $y = 2x^2 + 1$.

MENU
GRAPH
Kirjoita funktioiden lausekkeet, EXE kummankin saatteeksi.
V-Window
Voi aluksi valita
INIT (F1)
EXIT
DRAW (F6).

Kannattaa ottaa hieman tarkempi kuva joko ZOOM-toiminnalla tai vaihtamalla V-Window:ssa esimerkiksi: Xmin = -1, Xmax = 3, Ymin = -1, Ymax = 3. Uusi kuva näyttää tilanteen tarkemmin.

G-Solv (SHIFT ja F5)
ISCT (F5)
Näyttäisi olevan x = 1/3.
Sketch (SHIFT ja F4)
Tang (F2).
Siirry nuolella (mahdollisimman tarkkaan) leikkauspisteeseen ja paina EXE. Laskin piirtää tangentin ja antaa myös sen kulmakertoimen, mikäli SET UPissa on valittu Derivative : On.

7 Osoita, että pisteiden $(2,11\tfrac{1}{2},2)$ ja $(4,\tfrac{1}{2},-1)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa pisteiden (5,2,0), (1,1,1) ja (4,1,3) kautta kulkevaa tasoa vastaan.

Suoran suuntavektoriksi voidaan valita ko. pisteiden välinen vektori $\bar{s} = 2\bar{i} - 11\bar{j} - 3\bar{k}$.
Tason yhtälöstä $ax + by + cz + d = 0$ saadaan normaalivektori $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$.
Riittää osoittaa vektorit $\bar{s}$ ja $\bar{n}$ yhdensuuntaisiksi. Tasosta on annettu kolme pistettä, mutta yhtälössä on neljä kerrointa. Näitä neljää kerrointa voidaan muokata kertomalla yhtälöä vakiolla. Ajatellaan yhtälö kerrotuksi niin, että a = 2 (sama kuin suuntavektorin komponentti) ja sijoitetaan nuo kolme tason pistettä vuorollaan yhtälöön:

$$\begin{cases} 2b + d = -10 \\ b + c + d = -2 \\ b + 3c + d = -8. \end{cases}$$

MENU
EQUA
SIML (F1)

3 (F2)
Kirjoita kertoimet yksitellen. Huomaa, että ensimmäisessä yhtälössä toisen muuttujan (c:n) kerroin on 0.
SOLV (F1)
Saadaan b = -11 ja c = -3. Koska oli valittu a = 2, niin $\overline{n} = \overline{s}$.

9 Tutki, millä arvoilla $x \in R$ sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^k$ suppenee. Määritä summafunktio ja piirrä sen kuvaaja.

Kyseessä on geometrinen sarja, jonka suhdeluku on $q = \frac{2x-1}{3x+1}$. Suppenemisehdosta $|q| < 1$ saadaan x < -2 tai x > 0. Summafunktio on $\frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2x-1}{3x+1}} = \frac{3x+1}{x+2}$.
Kuvaaja on kaksiosainen, joten kirjoitetaan lauseke kahteen kertaan.

MENU
GRAPH
V-Window
Valitse esim. Xmin : -5 Xmax : 5 Ymin : -10 Ymax : 10.
EXIT
Kirjoita lausekkeet omille riveilleen:
(3x+1)/(x+2) , [-5,-2] hakasuluissa määrittelyalue, väli [-5, 2]
(3x+1)/(x+2) , [0,5].
DRAW (F6).

10 Osa tien kaarteesta on ympyrän kaari, joka kartalla kulkee xy-koordinaatiston pisteiden (28,98), (70,112) ja (126,84) kautta. Kuinka suuri on tämän ympyrän säde, kun yksikkö kartalla vastaa 25:tä metriä luonnossa?

Ympyrän yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$ Sijoitetaan tähän nuo kolme pistettä, jolloin saadaan kolme yhtälöä, tuntemattomina a, b ja c :

$$\begin{cases} 28a + 98b + c = -10388 \\ 70a + 112b + c = -17444 \\ 126a + 84b + c = -22932. \end{cases}$$

MENU
EQUA
SIML (F1)
3 (F2)
SOLV (F1).
Kertoimiksi saadaan: a = -140, b = -84 ja c = 1764. Säde saadaan normaalilla neliöön täydentämisellä, itse asiassa $r^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c = 4900.$

12 Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy käyrän $y = x^3 + 1$, x-akselin sekä suorien x = 3 ja y = 9 rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran x = 3 ympäri.

Piirretään ensin kuva:
MENU
GRAPH
Kirjoita funktion lauseke ja toiselle riville myös 9 (siis suora y = 9).
V-Window
Sopiva alue on esim. Xmin: -2 Xmax: 10 Ymin: -2 Ymax: 10.
EXIT
DRAW (F6)

Piirretään vielä pystysuora x = 3:
Sketch (SHIFT ja F4)
Vert (F6 ja F4) engl. vertical, pystysuora.
Siirry kohtaan, jossa x on mahdollisimman lähellä 3:a ja paina EXE ja vielä EXIT.
Tuon alueen pyörähtäessä suoran x = 3 ympäri ovat vaakasuorat poikkileikkaukset ympyröitä, säteenä $3 - x = 3 - \sqrt[3]{y-1}$. Tilavuus on

$$V = \pi \int_0^9 \left(3 - (y-1)^{\frac{1}{3}}\right)^2 dy \ .$$

Laskimella integraalit suoritetaan aina x:n suhteen:

MENU
RUN
OPTN
CALC (F4)
$\int dx \quad (F4)$
Kirjoita $(3 - (x-1)\text{^}(1/3))^2{,}0{,}9)$ ja lopuksi EXE. Tämä kerrottuna π:llä antaa vastauksen.

14 Selosta, millainen on yhtälön numeerisessa ratkaisemisessa sovellettava Newtonin menetelmä. Ratkaise sen avulla yhtälön $e^x + \sin x = 0$ suurin juuri viiden desimaalin tarkkuudella.

Newtonin menetelmällä tarkennetaan juuren likiarvoa rekursiivisesti (ei toimi aina):
$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ lähtien jostakin sopivasta arvosta x_1.
Suurimman juuren likimääräisen koon voi katsoa kuvaajasta:

MENU
GRAPH
Varmista SET UPista, että Angle : Rad. Kirjoita funktion lauseke ja EXE lopuksi.
V-Window
Valitse esim. **INIT** (F1).
EXIT
DRAW (F6)

Kuvaaja viittaa siihen, ettei positiivisella puolella ole juuria. Tämä pitää paikkansa, koska positiivisilla x:n arvoilla on $e^x + \sin x > e^0 + \sin x = 1 + \sin x \geq 0$.

MENU
RUN
0
EXE lähtöarvoksi $x_1 = 0$
Ans – (e^x Ans + sin Ans) / (e^x Ans + cos Ans)
Painele EXEä niin kauan, kunnes peräkkäiset arvot pysyvät samana (riittävällä tarkkuudella).

KEVÄT 2002

7 Suorakulmion pinta-ala on 30 m^2 ja piiri enintään 24 m. Mitä arvoja suorakulmion sivujen pituudet voivat saada?

Jos suorakulmion kanta on x, niin korkeus on $30/x$ ja piiri $2x + 60/x$. Mahdollisiin arvoihin voi saada tuntumaa taulukon avulla.

MENU
TABLE
Kirjoita lauseke $2x + 60/x$.
RANG (F5)
Start: 1
End: 11
pitch: 0.1
EXIT
TABL (F6)
Arvoja selaamalla nähdään, että (yhden desimaalin tarkkuudella) väli [3,6; 8,4] käy.

12 … Onko kuvaus $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ injektio? …

Kuvaajasta paljastuu kysymyksen vastaus.
MENU
GRAPH
Kirjoita funktion lauseke.
V-Window
Valitaan reilun kokoinen alue: Xmin: -10 Xmax: 10 Ymin: -20 Ymax: 20.
EXIT
DRAW (F6).
Kuvaaja näyttää monotonisesti kasvavalta. Varmistetaan asiaa vielä derivaatan $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ kautta. Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Onko minimiarvo vähintään 0?

MENU
RUN
OPTN
CALC (F4)

FMin (F6 ja F1).
Kirjoita tähän
$3x^2 - 12x + 12$, -100, 100)   etsitään siis väliltä [-100, 100]
EXE.
Minimipiste on (2, 0), joten minimiarvo on 0 ja derivaatta muutoin positiivinen ja funktio aidosti kasvava.

13 Millä reaaliluvuilla x funktio f on määritelty, kun

$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{5}\right)^n (\sin x)^n (\cos x)^n$?

Määritä funktion pienin ja suurin arvo sekä vastaavat x:n arvot.

Kyseessä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi $a = 1$ ja suhdeluku $q = \frac{9}{5}\sin x \cos x$. Funktio on jaksollinen, jaksona 2π, joten riittää tarkastella väliä $[0,2\pi]$. Suppenemisehto on $-1 < q < 1$.
Tutkitaan ehtoa kuvaajan avulla.

MENU
GRAPH
Kirjoita yhdelle riville $\frac{9}{5}\sin x \cos x$, toiselle –1 ja kolmannelle 1 (siis suorat $y = -1$ ja $y = 1$).
V-Window
Valitse esim. Xmin: 0   Xmax: 2π Ymin : -2   Ymax : 2.
Varmista vielä SET UPista, että Angle: Rad.
EXIT
DRAW (F6).
Käyrä pysyy vaakasuorien välissä, joten sarja näyttää suppenevan aina.

Katsotaan vielä pienin ja suurin arvo.
G-Solv (SHIFT ja F5)
MAX (F2)
EXE (valitaan kolmesta kuvaajasta tuo käyrä).
Tulos: x = 0.785…   y = 0.9.
Paina nuoli oikealle ja saat toisen maksimin. Kyseiset x:n arvot saadaan lausuttua π:n avulla jakamalla ne ensin π:llä.
Minimit saadaan samalla tavalla.

15 Muodosta funktion $f(x) = e^{x/2}$ astetta n oleva Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$, kun $n = 0, 1, 2, 3$. Mikä on Taylorin polynomin asteluku, kun virhe kohdassa $x = 1$ on pienempi kuin 10^{-16} ?

Derivoimalla saadaan $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} e^{x/2}$. Tutkitaan virhettä laskimella.

Taylorin polynomin virhetermi (MAOLin avulla) kohdassa $x = 1$ on

$R_{n+1}(1) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$, missä t on välillä (0, 1).

$$R_{n+1}(1) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}e^{t/2} < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1}(n+1)!} < 10^{-16}$$, kun

$2^{n+1}(n+1)! > 10^{16}\sqrt{e} = 1{,}648... \cdot 10^{16}$.

Tämän ratkaisu täytyy joka tapauksessa selvittää laskimella.

MENU
TABLE
Kirjoita lauseke $2\text{^}(x+1)\times(x+1)!$. (Huutomerkki ! kohdasta OPTN ja PROB.)
Lopuksi EXE.
EXIT
RANG (F5) (tarvittaessa ensin F6)
Start: 3
End: 20
pitch: 1
EXIT
TABL (F6).
Selaamalla taulukkoa nähdään, että n = 14 riittää.